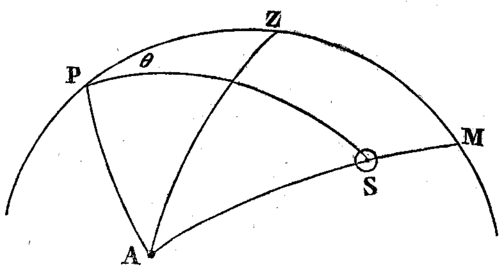
il circolo dell'Eclittica una volta all'anno con moto quasi uniforme, restando addietro in longitudine rispetto al sole di un angolo che non si scosta più di un grado dall'angolo retto. Se adunque noi poniamo l'origine dei tempi nell' istante del solstizio estivo, la longitudine λ dell'apice sarà una quantità sensibilmente proporzionale al tempo, e l'incremento di questo potrà essere misurato dall'incremento $d\lambda$.

FIG. 3.



Sia nella fig. 3ª PZM il meridiano dell'osservatore, S il sole, P il polo celeste, Z lo zenit, ASM l'eclittica, A l'apice. L'angolo orario del sole, o il tempo vero sarà MPS $= \theta$. Per le cose dette l'arco SA dell'eclittica supponiamo costantemente di 90°. L'angolo APS al polo dell'Equatore, sarà generalmente parlando, diverso da 90°: con un calcolo, che quì è inutile riferire per disteso, trovo che il suo massimo valore nell'anno è 94°56′, il minimo 85°4′ Esso può, senza pericolo d'errare più che uno o due minuti, esser calcolato colla formula

$$APS = 90^\circ + (4^\circ\ 56')\sin 2\lambda.$$

Indicando per brevità con a la costante $4^\circ\ 56'$ l'angolo APZ sarà esprimibile per

$$90^\circ + \theta + a.\sin 2\lambda.$$

Dei due lati, che comprendono questo angolo nel triangolo PZA, cioè PZ, PA, il primo è la colatitudine del luogo d'osservazione, che diremo $90^\circ - \omega$; l'altro è la distanza polare dell' apice, e sappiamo aversi, per una formula conosciuta

$$\cos PA = \sin\lambda \sin\varepsilon\,,$$

dove ε è l'obliquità dell'eclittica. Nel medesimo triangolo ZPA il lato ZA è la distanza zenitale dell'apice, o il complemento della sua altezza φ. Noi avremo dunque

$$\cos ZA = \sin\varphi = \sin\omega \cos PA$$
$$+ \cos\omega \sin PA \cos(90^\circ + \theta + a \sin 2\lambda).$$

In questa espressione noi mettiamo, invece di cos PA il suo valore $\sin\lambda \sin\varepsilon$, invece di sin PA i due primi termini dello sviluppo

$$\sqrt{1-\cos^2 PA} = \sqrt{1-\sin^2\lambda \sin^2\varepsilon}$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\lambda \sin^2\varepsilon + \ldots.$$

il che è sufficiente per l'uso nostro , essendo $\sin\varepsilon$ una frazione abbastanza piccola : finalmente invece di $\cos(90^\circ + \theta + a \sin 2\lambda)$ surrogheremo il suo equivalente $-\sin(\theta + a \sin 2\lambda)$, il quale si potrà sviluppare considerando $a \sin 2\lambda$ come quantità differenziale : ciò dà

$$\cos(90^\circ + \theta + a \sin 2\lambda) = -\sin\theta - a \sin 2\lambda \cos\theta.$$

Con queste semplificazioni noi otteniamo

$$\sin\varphi = \sin\omega \sin\lambda \sin\varepsilon$$
$$-\cos\omega\,(1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\lambda \sin^2\varepsilon)(\sin\theta + a \sin 2\lambda \cos\theta).$$

Introducendo questo valore di $\sin\varphi$ nella formula (1), moltiplicando per $d\lambda$, ed integrando rispetto a λ fra i limiti 0 e 2π (cioè estendendo l'integrale alle osservazioni di tutto l'anno) poi dividendo il risultato per 2π, si ottiene il numero esprimente la frequenza media annua corrispondente all'ore θ di tempo vero nel luogo di latitudine ω colla seguente formula :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\lambda \left(1 + \frac{V}{v}\sin\varphi\right) = 1 - \frac{V}{v}\cos\omega \sin\theta\,(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\varepsilon).$$

Qui l'unità esprime la frequenza media assoluta, cioè quella che si calcola su tutte le epoche dell'anno e su tutte le ore del giorno. Indicando con K il numero orario medio assoluto, cioè il numero di stelle che in media si osservano durante un'ora qualsiasi dell'anno, il numero medio di quelle che si osservano durante l'ora che comincia con $\theta - 30^{\text{min}}$, e finisce con $\theta + 30^{\text{min}}$ sarà espresso (con errore affatto trascurabile) da

$$K\left\{1 - \frac{V}{v}\cos\omega \sin\theta\,(1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\varepsilon)\right\}.$$

Si vede da questa espressione che al polo il numero orario annuo delle stelle cadenti è costante, e che le sue oscillazioni più ragguardevoli durante la giornata hanno luogo presso gli abitanti dell'Equatore.

Per la latitudine di Parigi 48°50′ e per l'obliquità dell' eclittica 23°27′ si ha per numero orario dell'anno da $\theta - 30^{\text{min}}$ a $\theta + 30^{\text{min}}$

$$N_\theta = K\left\{1 - 0,632\,\frac{V}{v}\sin\theta\right\} : \qquad (2)$$